**2-ЛЕКЦИЯ. Кейбір бірінші ретті интегралданатын теңдеулер**

**Лекция мақсаты:** Айнымалылары ажыратылатын**,** бБіртекті сызықты теңдеулер мен біртексіз сызықты теңдеулерді интегралдау әдісімен таныстыру. Толық дифференциалды теңдеуді интегралдау.

**Негізгі сөздер:** Айнымалыларды ажырату, біртектілік, біртексіздік, Эйлер әдісі, вариациялау, интегралдық көбейткіш.

## Қысқаша мазмұны

### Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер

**2.1.** Берілген теңдеудің шешімін сол теңдеуге кіретін функциялар және олардың интегралы түрінде өрнектеуді теңдеуді квадратура арқылы интегралдау деп атайды. Бұл параграфта кейбір оңай интегралданатын теңдеулердің түрлерін келтірейік.

$1^0$. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға тәуелсіз:

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

Мұнда *f(x)* функциясы берілген, $<a,b>$ аралығында үздіксіз деп есептелінеді. Бұл теңдеудің жалпы шешімін табу үшін одан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$y=\int f(x)dx+C \tag{2}$$

Бұл өрнек Коши түрінде былай жазылады:

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+y_0 \tag{3}$$

Мұнда $x_0$ – берілген сан деп, $y_0$ – кез келген сан деп есептелінеді.

$2^0$. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға ғана тәуелді:

$$\frac{dy}{dx}=f(y) \tag{4}$$

Мұнда f(y) функциясы кейбір $<c,d>$ аралығында үздіксіз деп есептелінеді және осы аралықта нөлге айналмасын. Онда бұл теңдеуді аударып жазуға болады:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)} \tag{5}$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін оның екі жағын *dy*-ке көбейтіп, анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}+C \tag{6}$$

немесе Коши түрінде:

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{f(y)}+x_0 \tag{7}$$

Мұнда $y_0$ – тұрақты сан деп, ал $x_0$ – кез келген сан деп есептелінеді.

$3^0$. Жоғарыда келтірілген теңдеулер айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына жатады. Мұндай теңдеулердің жалпы түрі былай жазылады:

$$f_1(x)f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0 \tag{8}$$

Осы теңдеуде $f_2(y)$ және $f_3(x)$ функциялары берілген облыста нөлге тең болмаса, онда теңдеудің екі жағын $f_2(y)\cdot f_3(x)$ көбейтіндісіне бөлсек, мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=0 \tag{9}$$

Бұл келтіру айнымалыларды ажырату тәсілі деп аталады. Жалпы, айнымалыларды ажырату деп *dx*-тың алдында тек *x*-қа тәуелді, ал *dy*-тың алдында тек *y*-ке тәуелді функциялардың тұруын қамтамасыз етуді айтады.

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін екі жағынан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C \qquad (10)$$

немесе Коши түрінде:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \qquad (11)$$

$4^0$. Айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына басқа да теңдеулерді жатқызуға болады. Олар кейбір алмастырулар арқылы оңай интегралданады. Солардың бірі:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by) \qquad (12)$$

түріндегі теңдеулердің $z = ax + by$ алмастыруы арқылы айнымалылары оңай бөлінеді. Шынында да, соңғы алмастырудан туынды тауып, теңдеуге қоятын болсақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

немесе

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

Соңғы қатынастан:

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

яғни айнымалылар бөлінді. Осыдан интеграл алсақ, онда жалпы интегралды мына түрде жазуға болады:

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C \qquad (13)$$

**Бірінші ретті сызықты теңдеулер**

**3.1.** Белгісіз функция мен оның туындысы сызықты түрде, яғни бірінші дәрежеде байланысқан теңдеуді сызықты дифференциалдық теңдеу деп атайды. Сызықты теңдеудің келтірілген түрін қарастырайық:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

Мұнда $p(x)$, $q(x)$ функциялары кейбір $<a,b>$ аралығында анықталған және үздіксіз деп есептелінеді. Егер $q(x) \neq 0$ болса, онда (1) теңдеуді біртексіз сызықты теңдеу деп, ал $q(x)=0$ болса, онда біртекті сызықты теңдеу деп атайды:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

Көбінесе (2) теңдеуді (1) теңдеудің сәйкес біртектісі деп атайды.

Біртекті (2) теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Екі жағын $y$-ке бөліп, мынандай теңдеу аламыз:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

Осы қатынасты интегралдасақ:

$$\ln|y| + \int p(x)dx = \ln C$$

өрнегін аламыз. Логарифмсіз жазсақ,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (3)$$

түріндегі (2) теңдеудің жалпы шешімін аламыз. Егер $y=0$ жағдайды қарастырсақ, ол осы жалпы шешімнің $C=0$ болғандағы мәніне сәйкес келетін шешім. Сондықтан $y=0$ – дербес шешім. Оны нөлдік немесе тривиал шешім деп те атайды және ол барлық уақытта бар шешім.

Біртекті (2) теңдеудің (3) жалпы шешімін Коши түрінде жазсақ, былай жазылады:

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx} \tag{4}$$

мұнда $x_0$ -тұрақты сан, ал $y_0$ – кез келген сан деп есептелінеді.

Біртекті теңдеу шешімдерінің екі қасиетін атап өтейік:

$1^0$. Егер $y_1$ және $y_2$ функциялары (2) теңдеудің шешімдері болса, онда олардың қосындысы: $y=y_1+y_2$ функциясы да сол теңдеудің шешімі болады.

$2^0$. Егер $y_1$ функциясы (2) теңдеудің шешімі болса, онда $y = Cy_1$ функциясы да ($C$ – кез келген сан) сол теңдеудің шешімі болады.

**3.2.** Енді берілген біртексіз (1) теңдеуге оралатын болсақ, оның жалпы шешімін табу үшін мынандай әдістерді қолдануға болады.

$1^0$. Тұрақты санды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі).

Біртексіз (1) теңдеудің жалпы шешімін біртекті (2) теңдеудің жалпы шешімі – (3) түрде іздейміз, бірақ мұндағы $C$ санын $x$-қа байланысты айнымалы функция деп есептейміз:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{5}$$

Осы функцияны (1) теңдеуге апарып қоялық:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Бұдан

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

теңдеуін аламыз. Енді осы теңдеуді интегралдасақ, онда

$$C(x) = C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{6}$$

өрнегін аламыз. Мұнда $C_0$ – кез келген тұрақты сан. Осы (6) өрнекті (5) қатынасқа апарып қойсақ, онда біртексіз (1) теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \tag{7}$$

Соңғы шешімді Коши түрінде жазсақ, онда мынандай өрнек аламыз:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx\right] \tag{8}$$

мұнда $x_0$-тұрақты сан, ал $y_0$ – кез келген сан деп есептейміз.

$2^0$. Бернулли әдісі.

Біртексіз (1)теңдеудің шешімін $y=u(x)v(x)$ түрінде іздейміз. Сонда

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x) \tag{9}$$

Мұндағы, $u(x)$ функциясын біртекті $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ теңдеудің шешімі $u = e^{-\int p(x)dx}$ түрінде алсақ, онда (9) қатынастан

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{dv}{dx} = q(x)$$

теңдеуін аламыз. Осыдан интегралдау арқылы

$$v = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{10}$$

болатынын көреміз. Мұнда $C$ – тұрақты сан. Табылған $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының көбейтіндісі y(x) функциясын беретін болғандықтан,

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left|C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right|,$$

яғни жалпы шешім (7) түрге келеміз.

$3^0$. Интегралдаушы көбейткіш әдісі (Эйлер әдісі).

Берілген біртексіз (1) теңдеудің екі жағын $e^{\int p(x)dx}$ функциясына көбейтіп, ықшамдап жазатын болсақ, онда мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)dx}) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Осы қатынасты интегралдасақ:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

ал бұдан

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right].$$

Тағы да жалпы шешім – (7) түрге келдік.

## Толық дифференциалды теңдеулер

**4.1.** Симметриялық түрде берілген

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

дифференциалдық теңдеудің сол жағы кейбір екі айнымалы $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалына тең болса, яғни

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) \tag{2}$$

онда (1) теңдеуді толық дифференциалды теңдеу деп атайды. Соңғы (2) теңдікті пайдалансақ, (1) теңдеуді былай жазуға болады:

$$du(x,y) = 0 \tag{3}$$

Бұдан

$$u(x,y) = C \tag{4}$$

өрнегі (1) теңдеудің жалпы интегралы болатынын көреміз. Сондықтан осы $u$ функциясын табу жолын келтірейік.

Әдетте, берілген теңдеудің толық дифференциалдылығын бірден байқау мүмкін емес. Сондықтан ондай жағдайды анықтайтын белгіні келтірейік.

Айталық, (1) теңдеудегі $M(x,y)$ және $N(x,y)$ функциялары кейбір $D$ облысында өзінің дербес туындылары $\frac{\partial M}{\partial y}$ және $\frac{\partial N}{\partial x}$ мен бірге үздіксіз функциялар болсын.

**Теорема.** Берілген (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болу үшін бір байланысты $D$ облысында

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

тепе-теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

**Дәлелдеуі.** Қажеттілігі. Айталық, (1) теңдеудің сол жағы кейбір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болсын:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{6}$$

Бұл тепе-теңдіктен мына қатынастарды аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \tag{7}$$

Соңғы қатынастардың біріншісін $y$ бойынша, екіншісін $x$ бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{8}$$

тепе-теңдіктері шығады. Шарт бойынша тепе-теңдіктердің оң жақтары үздіксіз. Ендеше, олардың сол жақтары да үздіксіз. Ал үздіксіз функцияның аралас дербес туындылары өзара тең болады да,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{9}$$

тепе-теңдігі алынады.

Жеткіліктілігі. Айталық, (5) шарт орындалсын. Алдымен (7) қатынастардың біріншісін қанағаттандыратын $u(x, y)$ функциясын іздейік. Сол бірінші қатынасты $x$ бойынша интегралдасақ, мынандай функция аламыз:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y), \tag{10}$$

мұнда $\varphi(y)$ – тек у-ке байланысты кез келген функция және ол үздіксіз дифференциалданатын функция болсын.

Енді осы $\varphi(y)$ функциясын (7) қатынастардың екіншісі орындалатындай етіп алайық, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y)\right) = N(x, y) \tag{11}$$

Бұл жерде мына теңдікті көрсете кетейік:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx = N(x,y)\Big|_{x_0}^{x} = N(x,y) - N(x_0,y)$$

Сондықтан (11) қатынас былай жазылады:

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y)$$

немесе

$$\varphi'(y) = N(x_0, y) \tag{12}$$

Осыдан

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy \tag{13}$$

Осы табылған $\varphi(y)$ функциясын (10) өрнекке апарып қоятын болсақ,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy \tag{14}$$

функциясын аламыз. Ал бұл функцияны кез келген $C$ санына теңестірсек, онда берілген (1) теңдеудің жалпы интегралын аламыз:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \tag{15}$$

Егер $u(x, y)$ функциясын құруды (7) қатынастардың екіншісінен бастасақ, онда (1) теңдеудің жалпы интегралының түрі мынандай болады:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C \tag{16}$$

*Мысал-1.* $(2xy - 1)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$ теңдеуінің жалпы интегралын табу керек болсын.

Шешуі: $M(x,y) = 2xy - 1, N(x,y) = 3y^2 + x^2$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x,\ \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x,\ \text{ яғни } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Бұл теңдеу толық дифференциалды теңдеу. (15) өрнекті пайдаланып жалпы интегралды іздейміз. Мұнда $x_0 = 0, y_0 = 0$ деп алайық. Сонда:

$$\int_{0}^{x}(2xy - 1)dx + \int_{0}^{y}(3y^2 + x_0^2)dy = C$$

немесе

$$x^2y - x + y^3 = C$$